**Aufagebenkatalog zum Kurs zu Stoch0 – Winter 2024/2025**
Aufgaben zum Thema **Stetige Zufallsvariablen**
Dr. Anton Malevich

**Aufgabe 1** Sei $X$ eine beliebige stetige Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$. Sind die folgenden Aussagen richtig oder unter Umständen falsch?

a) $f(x) \leq 1$ für alle $x$.

b) $F(x) \leq 1$ für alle $x$.

c) $\displaystyle\int_x^\infty f(t)\,dt = 1 - F(x)$.

d) Ist $x_i < x_j$ so ist $F(x_i) \leq F(x_j)$.

**Aufgabe 2** Eine stetige Zufallsvariable $X$ habe Dichte

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{für } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Überprüfen Sie, ob die Dichte wirklich die Normierungseigenschaft besitzt.

b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F(x)$, und skizzieren Sie deren Verlauf.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X| \leq 0.5)$.

**Aufgabe 3** Sei $X$ eine stetige Zufallsgröße, für die gilt

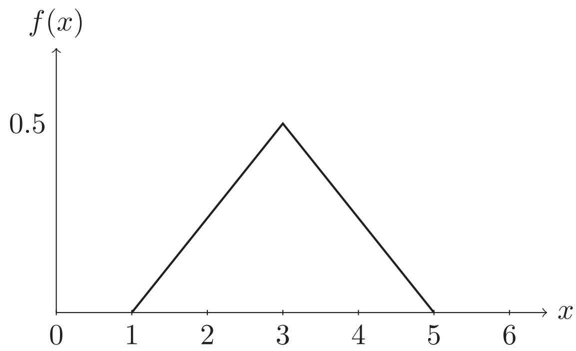
$$P(X \geq x) = \begin{cases} x^{-4} & \text{für } x \geq 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion von $X$.

b) Berechnen Sie die Dichte $f(x)$ von $X$.

c) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $X$.

**Aufgabe 4** Die Dichte einer stetigen Zufallsvariable $X$ besitzt folgende Gestalt:




Bestimmen Sie:
a) $E(X)$, b) $P(X < 3)$, c) $P(0 < X < 3)$, d) $P(X > 3)$, e) $P(1 < X < 7)$, f) $F(3)$.

**Aufgabe 5** Für eine stetige Zufallsvariable $X$ gilt:

$$f(x) = \begin{cases} 4ax, & 0 \leq x < 1 \\ -ax + 0.5, & 1 \leq x \leq 5 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bestimmen Sie den Parameter $a$ so, dass $f(x)$ eine Dichtefunktion von $X$ ist. Ermitteln Sie die zugehörige Verteilungsfunktion und skizzieren Sie deren Verlauf. Berechnen Sie den Erwartungswert sowie die Varianz von $X$.

**Aufgabe 6** Für $a, b \geq 0$ sei $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} a, & \text{falls } x \in [-5, -4], \\ b, & \text{falls } x \in [1, 3], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $a$ und $b$ sodass $g$ die Dichte einer Zufallsvariable $X$ mit $E(X) = 1$ ist.

b) Berechnen Sie $P(X > 0)$ für eine Zufallsvariable $X$ mit Dichte $g$.

c) Berechnen Sie $P(|X| \leq 2)$.

d) Berechnen Sie $P(X = -4)$.

**Aufgabe 7** a) Sei $X$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Sei $Y = X^{\frac{1}{4}}$. Geben Sie die Verteilungsfunktion von $Y$ an.
Seien nun die Zufallsvariablen $X_n$ und $Y_n$ $\mathcal{N}(0, 2^{n+1})$ verteilt und sei $Z_n = X_n + Y_n$.

b) Geben Sie die Dichte von $X_n$ an.

a) Zeigen Sie: $E[Z_n] = 0$ und $E[Z_n^2] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

b) Zeigen Sie: $Z_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ fast sicher.

**Aufgabe 8**

**Aufgabe 9**

**Aufgabe 10**

**Aufgabe 11** Sei $X$ exponenziellverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Verteilungsfunktion $F_X$ durch

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

gegeben ist und dass ferner gilt:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

**Aufgabe 12** Sei $X$ eine zum Parameter $\lambda$ exponentialverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie die "Gedächtnislosigkeit" der Exponentialverteilung, d. h. dass

$$P(X \leq x | X > s) = P(X \leq x - s)$$

für $x, s \in \mathbb{R}$ mit $s < x$ gilt.

**Aufgabe 13** Sei $Y$ standardnormalverteilt. Zeigen Sie: Dann ist $X = aY + b$ normalverteilt mit Parametern $E(X) = b$ und $\mathrm{Var}(X) = a^2$.

**Aufgabe 14** Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen, welche alle denselben Erwartungswert $\mu$ und dieselbe Varianz $\sigma^2$ haben. Zeigen Sie: Dann ist

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)$$

standardnormalverteilt.

**Aufgabe 15** Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^2, & \text{falls } 0 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

**Aufgabe 16** Sei $X$ exponentialverteilt mit Parameter $a > 0$.

a) Beweisen Sie, dass $E[X] = \frac{1}{a}$.

b) Sei $Y := \sqrt{X}$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_Y : \mathbb{R} \to [0, 1]$ von $Y$.

Seien nun $X_1, X_2, \ldots$ Zufallsvariablen, wobei $X_n$ exponentialverteilt mit Parameter $n^2$ sei für $n \in \mathbb{N}$.

c) Beweisen Sie, dass $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ f.s.

**Aufgabe 17** Sei $W$ eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte $f_W : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, die gegeben ist durch

$$f_W(x) = \begin{cases} 72x, & \text{falls } 0 \le x \le \frac{1}{6}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie $P\left(W \le \frac{1}{8}\right)$

b) Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $E[W^m] = \frac{72}{m+2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{m+2}$ ist.

c) Folgern Sie $E[W] = \frac{1}{9}$ und $\mathrm{Var}[W] = \frac{1}{648}$.

Seien $W_1, W_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die alle wie $W$ verteilt sind.

d) Berechnen Sie $\mathrm{Var}[W_1 + 3W_2]$.

e) Berechnen Sie $P\big(\max\{W_1, W_2\} \le \frac{1}{8}\big)$.

f) Konvergiert $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i$ für $n \to \infty$ fast sicher? Falls ja, was ist der Limes?

g) Bestimmen Sie

$$\lim_{n\to\infty} P\left( \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_n - \frac{n}{9}}{\sqrt{\frac{n}{648}}} \le 0 \right).$$